1) В первый раз кто-то сказал, что у него больше 10, а во второй раз он мог сказать только <10, <9 ... <1, значит во второй раз он соврал => он лжец => соврал и в первый раз =>
Во второй раз кто-то сказал, что у него меньше 1 (или меньше 2), но в первый раз он мог сказать только больше 1, 2, ... 10 => он ~~говорил~~ соврал т.к $1 < x < 2$ или $1 < x < 1$ в целых числах нету => это был лжец.
Первый и второй не могут быть одним человеком, т.к. если первый сказал >10, <1,2,3,4 то второй ~~мог~~ сказал <2, >1,2,3,4.

Значит сущ. минимум 2 лжеца

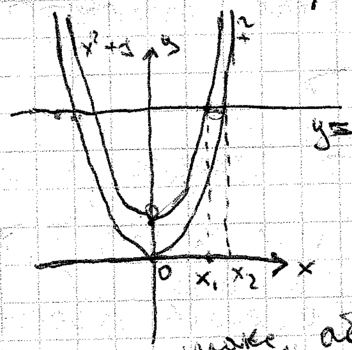
Пример на 8 рыцарей:

1ый раз:	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8
2ой раз:	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10
число:	2	3	4	5	6	7	8	9

35

2) Рассмотрим графики $y=x^2$, $y=x^2+1$, $y=a$

$a \geq 0$



(a не из текста задачи)

Причем тут прямая $y=a$?

пол. абсцисса

Обозначим пересечение $y=x^2+1$ с $y=a$ за x_1, $y=x^2$ с $y=a$ за x_2

Докажем, что при $a>1$, x_2 и x_1 не могут быть целыми числами одновременно:

Рассмотрим расстояние от x_2 до x_1:

$x_2 - x_1 = \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$

$f(a) = \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$ — это функция, завис. от a, $E(f) \in [1; 0)$.

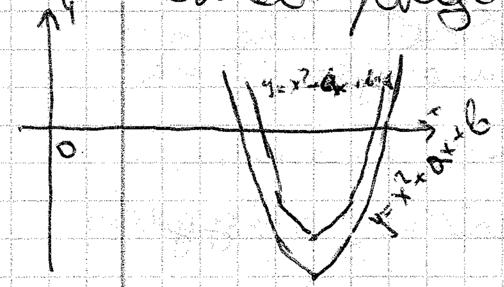
$f(a)$ — на своем промежутке убывает, а значит значения всегда будут ≤ 1, максимум в точке $a=1$

Получается, что двигая прямую $y=a$ вверх по оси oY, расстояние от x_2 до x_1 всегда меньше 1 (кроме $a=1$), но разность целых чисел должна быть целой $\Rightarrow$ x_2 и x_1 не могут быть целыми одновременно.

а значит целыми корни будут в при $a=1$

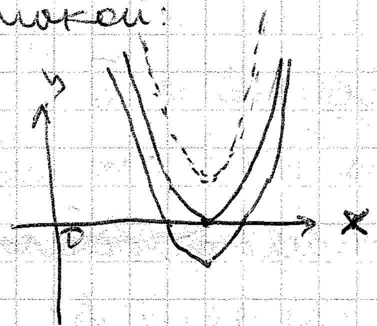
Рассмотрим теперь $f(x)=x^2+ax+b$ и
$f_1(x)=x^2+ax+b+1$

$f_1(x)$ будет отличаться от $f(x)$ только смещением на 1 вверх, значит можно, переместив $f(x)$ ~~$f(x)$~~ в точку $(0;0)$, сказать, что графики будут такими же, как и x^2 и x^2+1, но $y=a$ будет иметь вид $y=-\frac{a^2}{2}+b$, т.к. $-\frac{a^2}{2}$ и b – константы, то это будет прямая, а значит наше раннее доказательство работает.



Только если в доказательстве мы

использовали прямую
$y=a$, то выше нее
ось OX => значит, что
когда ось OX не
пересекает $x^2+ax+b+1$ в вершине параболы, то корни у $f_1(x)$ и у $f(x)$
не будут целыми одновременно,
а значит график будет примерно
такой:



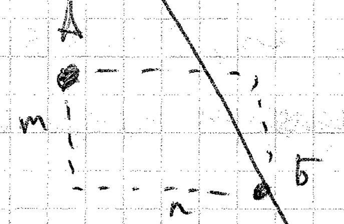
9.Н

а т.к график $x^2+ax+b+2$ выше,
чем $x^2+ax+b+1$, то корней у
него не будет (ось OX ниже
вершины)

?

0б

3) Допустим мы нашли такое расположение клеток на доске, что закрашенных максимально и (нашли ~~так~~ на этой доске такое расположение

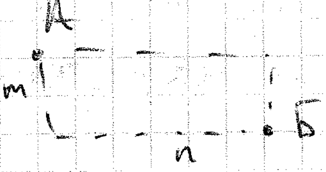


$m + n > 15$

что расстояние между А и Б > 15 и в этой области нет других клеток (в пунктирной области тогда мы можем разделить поле на две части и сдвинуть какую нибудь часть к другой со всеми клетками, это не нарушит условий, т.к)

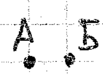
(~~Значит любое такое расстояние будет равно 15~~)

Допустим мы нашли две клетки такие, что



$n + m \le 15$

расстояние от A до Б < 15, значит мы можем (~~точки не обр-зом, т.к. и прошлое~~) соединить вместе

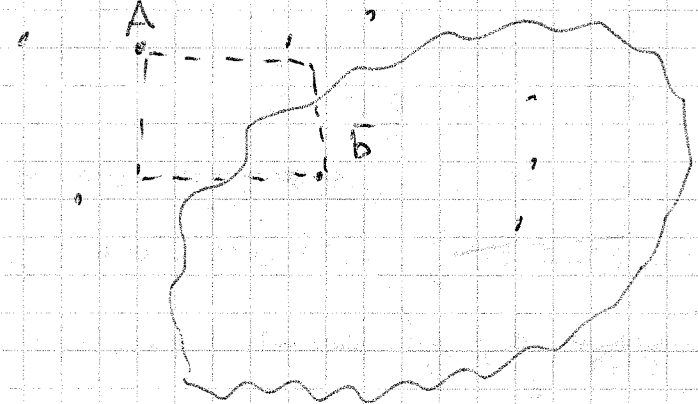


или

тогда расстояние от A до Б $= 1$, условие это не нарушает, ~~клетки~~ закраш. клетки не уменьшились (а может после этого можно будет добавить)

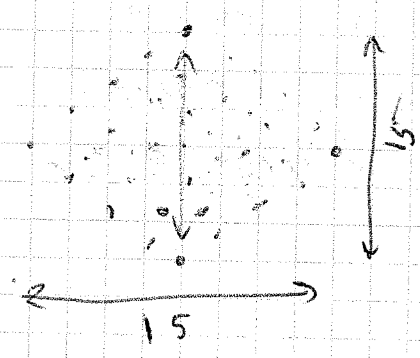
Значит в нашем размещении расстояние между 2 клетками, в пространстве которых нет других клеток, равно 1

Такое преобразование мы делали, разделяя доску на две части так чтобы перемещая часть с А к части с Б ~~ни~~, условие не нарушалось



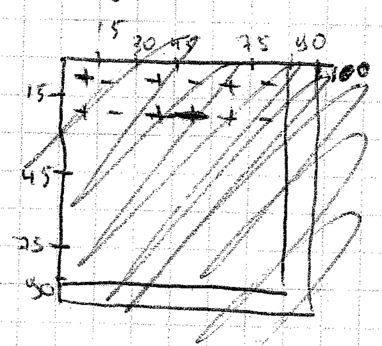
Такую часть всегда можно выделить, потому что перемещаем на число < 14, а на доске было выполнено начальное условие, Значит ~~в~~ наши клеток либо вместе либо расстояние ≥ 15

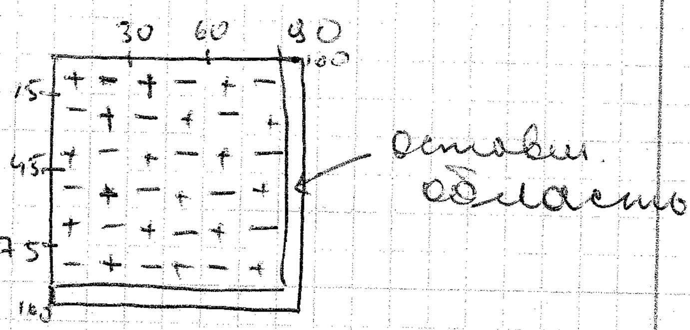
Соединяясь вместе клетки образуют Ромб, с диаметром 15



– ↑15 ↓15 } 30 !

Разделив все поле на части по 15×15 получим





15

где „+" это 15×15 с точками
а „-" это 15×15 полностью без точек

В оставшейся области ромб „срезан"
и имеет соответственно меньше
точек.

Получаем ответ:
15 · (сколько в одном ромбе) +
6 (сколько в усеченном с одной
стороны) + (сколько в усеч. с 2х
сторон)

б) Пусть есть
$n, \; n+1, \; n+2, \; n+3$
выбрать 3 из 4 можно
4-мя способами, получаем 4 варианта
~~их~~ суммы чисел:

$3n+3 = 3(n+1)$,   1 2 3
$3n+4$,   1 2 4
$3n+5$,   1 3 4
$3n+6 = 3(n+2)$ 2 3 4

если $(n+1)$ – простое число, то $n+2$ – составное, а значит $3\cdot(n+2)$ будет удовлетворять условию, иначе $(n+2)$ – может быть простым, тогда $(n+1)$ – составное и условие верно, ведь составное число можно разложить на два нат. числа > 1 и $3(n+1)$ – будет иметь 3 нат. числа.

4б

а если составное дел на 3
по 2 одинак. множителя

7) Пусть $a^{\frac{1}{2^n}} = t$

тогда $x_n = 2^n(t-1)$, $\sqrt[2\cdot 2^n]{a} = \sqrt{t}$

$$x_{n+1} = 2\cdot 2^n(\sqrt{t}-1)$$

Если это убыв. последовательность, то $x_n - x_{n+1} > 0$

Докажем:

$$x_n - x_{n+1} =$$

$$= 2^n(t-1) - 2\cdot 2^n(\sqrt{t}-1) =$$

$$= 2^n(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1) - 2\cdot 2^n(\sqrt{t}-1) =$$

$$= 2^n(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1-2) =$$

$$= \underbrace{2^n}_{>0}\underbrace{(\sqrt{t}-1)^2}_{\geq 0} \Rightarrow x_n - x_{n+1} > 0$$

ч.т.д.

7б

9) Количество посещений бассейна различны.
Чем меньше ученик ходит в бассейн, тем больше других учеников может пойти в бассейн => первый посетит к, второй к+1 ... последний $k+m-1$.
Т.к каждый ученик должен сходить хотябы раз, что верхняя граница m это 30. (при 31 кто-то должен ходить 31 день)
$m=15$ возможна, докажем, что $m=16$ и $m>16$ невозможна
чтобы выполнить условие различности кол-ва дней, первый должен сделать не меньше 1 го посещения, 2ой не меньше 2х и последний 16 не меньше 16ти, ~~предпослед. сделает не меньше 15~~
Для удобства будем рассматривать опред. порядок посещений, т.к если переставить дни местами, ничего не изм.

~~помощник~~ 16ый идет в первые 16 дней ~~пред~~. 15ый, куда бы не пошел пой-дет в день с пред => ~~его~~ выгодно чтобы он в 1 день не ходил с 1ым, а в остальные ходил => идет с 3его дня по 17ый и так далее. При ~~таком~~ ~~раз~~ наиболее выгодном расположении первому не будет куда идти (второй взял 29ый и 30ый день) ~~.~~. Если 16ый пойдет на 17 дней получится ~~что~~ что второй и первый не смогут попасть (это же и доказывает при $m \geq 17$)

Пример на $n = 15$