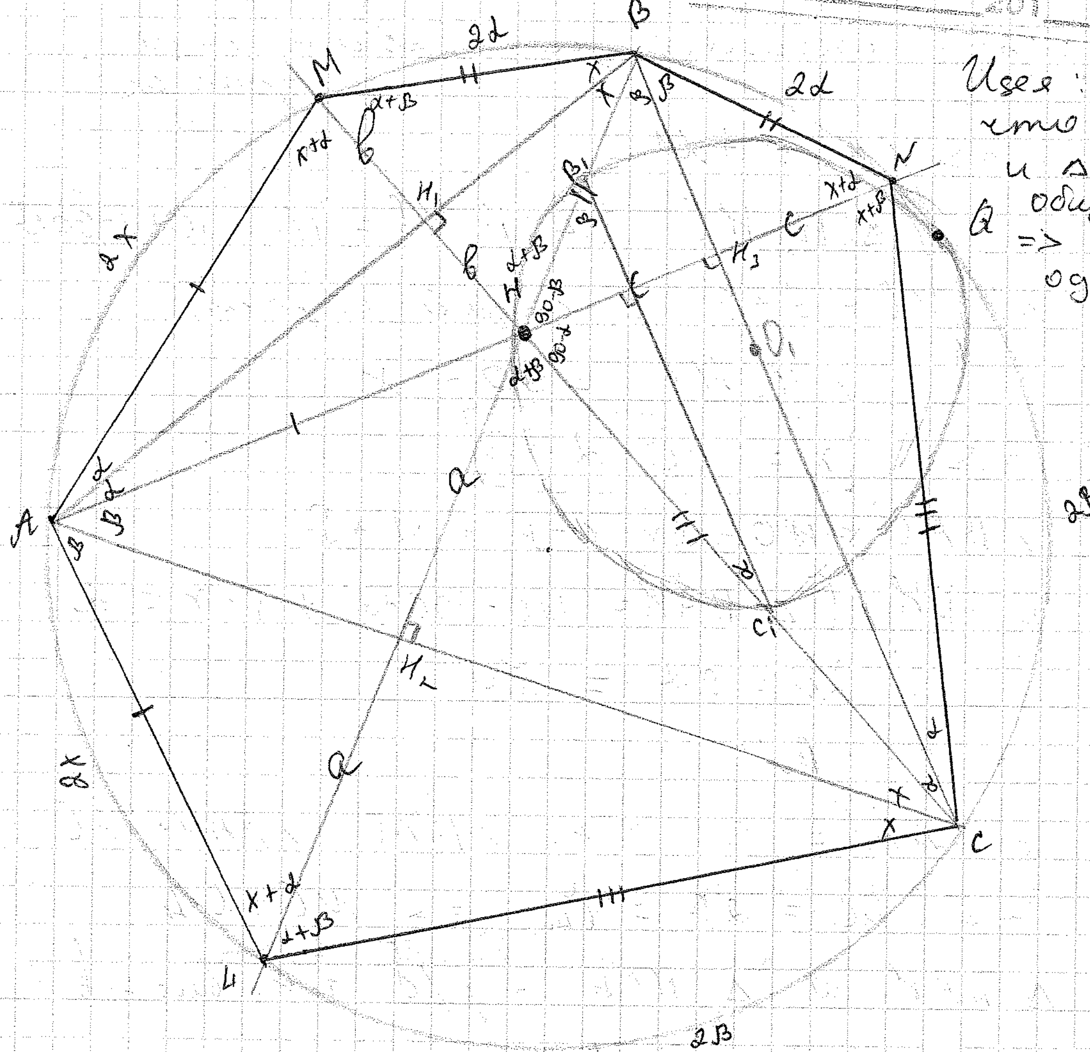
Задача 9.4.

Док-ть: оп. окр. △ABC касается оп. окр △B_1HC_1.

Док-во:



Идея: Док-ть, что △ABC и △BKC – р/б общее основан => сер. ⊥ один.

$\exists$ $\angle HC_1B_1 = \alpha$, $\angle HB_1C_1 = \beta$, $\angle MCA = x$

$\Rightarrow \angle C_1CB = \alpha$, $\angle CBB_1 = \beta$ т.к. $C_1B_1 \parallel CB$ по усл.

$\Rightarrow \breve{MB}_{\text{меньш}} = 2\alpha$, $\breve{LC}_{\text{мен.}} = 2\beta$ т.к. углы вписанные

$\triangle BH_1H$ и $\triangle HH_2C$ по 2-м углам

$\Rightarrow \angle ABH_2 = \angle MCA = x$ - опираются на дуги $\breve{AL}$ и $\breve{AM}$

$\Rightarrow \breve{AL} = \breve{AM} = 2x$

Хорды соединяющие равные дуги - равны

$\Rightarrow AL = AM$

$\triangle H_2HC$ ($\angle H_2HC = 180-90+\alpha-90+\beta$

$\angle H_2HC = \alpha+\beta$ с другой стороны

$\angle H_2HC = 90 - x$

$\Rightarrow \boxed{x = 90-\alpha-\beta}$

$\angle BAC = 180-2x-\alpha-\beta = \alpha+\beta$

$\triangle ABH$ ($\angle BAH = 180-90+\alpha-\alpha-\beta-x = \alpha$

$\Rightarrow \breve{BN} = 2\alpha = \breve{BM}$

$\Rightarrow BN = BM$

$\angle NAC = \beta$ т.к. $\angle BAC = \angle BAH + NAC$

$\Rightarrow \breve{NC} = 2\beta = \breve{CL} \Rightarrow NC = CL$

$\triangle LAH$ и $\triangle HCL$ - р/б т.к. бисс. = выс.

$\Rightarrow LH_2 = H_2H = a$

$\triangle MAH$ и $\triangle MBH$ - р/б т.к. бис = выс

$\Rightarrow MH_1 = H_1H = b$

$\triangle HBN$ и NCH - р/б т.к. бис = выс.

=> $HH_3 = H_3N = c$

=> $x+\beta = x+\alpha$ $\alpha = \beta$

=> $\triangle ABC$ – р/б – AH_3 – бис. выс.

=> AH_3 – медиана, $BH_3 = H_3C$

(·) O, совпадёт с (·) H_3,

а (·) N с (·) Q.

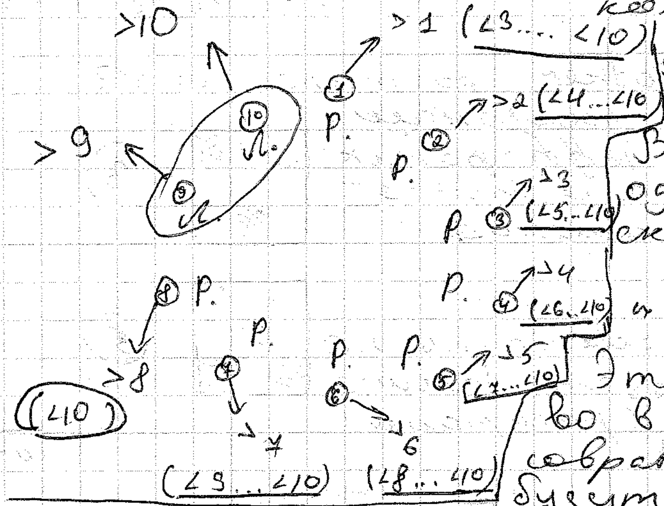
т.к. два р/б △ с общим основанием сер. ⊥ общий. (на ~~общей~~ одной прямой)

=> (·) Q ∈ ω и ∈ Γ.

ч.т.д.

7

Задача 9.2. Какое наибольшее кол-во рыцарей?



Решение:

В первый раз один из людей сказал фразу: «Моё число больше 10». Этому же человеку во второй раз придётся соврать, поскольку будут фразы: «Моё число меньше 1», «Меньше 10» – это скажет лжец. И он будет 10.

Человеку сказавшему «Моё число больше 9», тоже придётся соврать, ведь фраза: «Моё число меньше 10»

ему не подойдёт (т.к. по усл. число целое)
– это тоже лжец ∃ будет 9.

Остальные не будут рыцарями т.к. произнеся любую из фраз первого круга им достанется в лучшем случае фраза подходящая им – рыцарь.

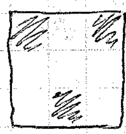
10 – 2 лжеца = 8 – рыцари

7 5б Ответ: мах. кол-во рыцарей 8.
Не приведен четкий пример

Задача 9.5.

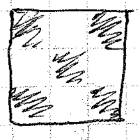
куб 1000 × 1000 × 1000 грань разбита на 1000^2 клеток

Решение: Удобнее раскрашивать клеточки по диагонали
В данный квадратик больше не поместится ни одна закрашенная клеточка.



3

Если раскрашивать по диагонали будет больше вместимость (раскрашенных клеток).

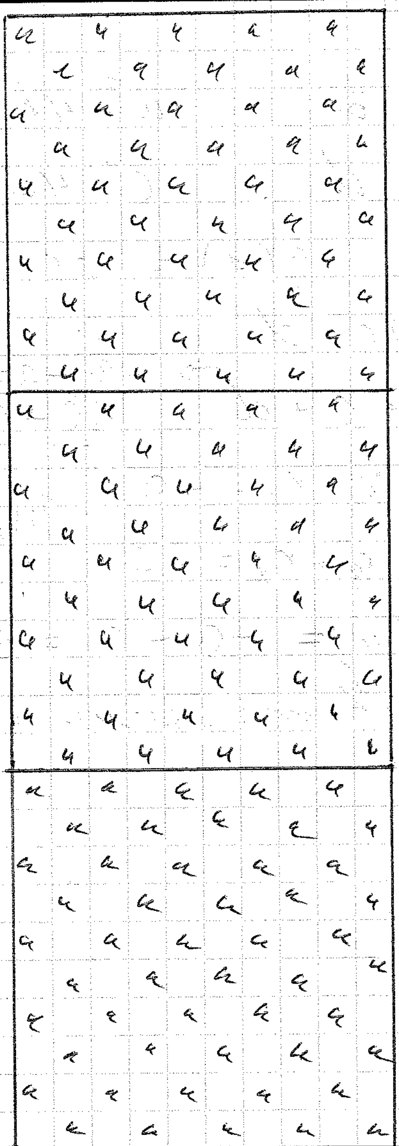
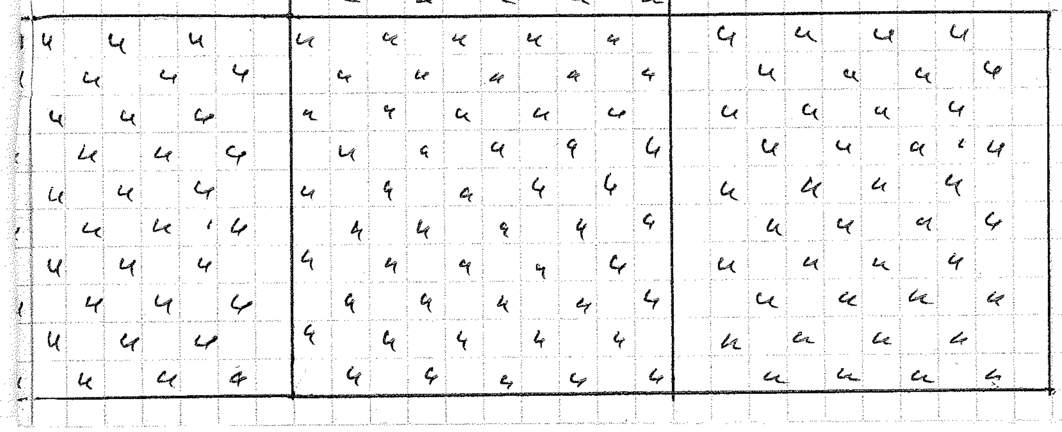


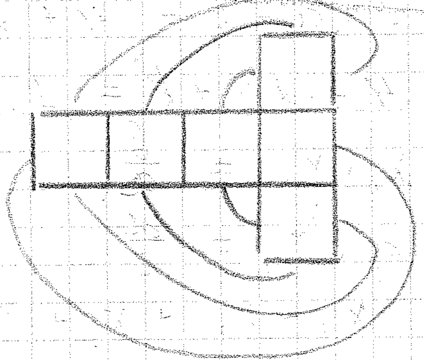
3

Уменьшим масштаб грани в 100 раз.

4 · 500.000 + 2 · 400.000 =
= 2.000.000 + 800.000 =
= 2.800.000 закрашенных.

Ответ: 2.800.000 – мах. закрашенных клеток.



Смотрим совпадение закрашенных клеток каждой грани по данной схеме.

Задача 9. 1.

① $f(x) = x^2 + ax + b$ $\quad a^2 - 4b > 0$ корни x_1, x_2

② $g(x) = x^2 + cx + d$ $\quad c^2 - 4d > 0$ x_3, x_4

$f(1) = g(2) \qquad g(1) = f(2)$

$$\begin{cases} 1 + a + b = 4 + 2c + d & ① \\ 4 + 2a + b = 1 + c + d & ② \end{cases} \Rightarrow -3 - a = 3 + c$$

$\boxed{c + a = -6}$

① $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{a} \qquad x_1 + x_2 = -a$ Тh Виета.

② $x_3 \cdot x_4 = \frac{d}{c} \qquad x_3 + x_4 = -c$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a - c = 6$

4

Ответ: сумма корней = 6

Задача 9.7.

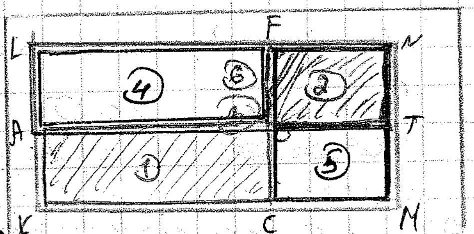
стороны все || м/у
собой и столом

Никакие 2 ▭ не
могут иметь 4 общ.
вершин.

Может ли каждая вершина быть
вершиной ровно 3-х прямоуг.?

Ответ: нет, не может.

Решение:



Возьмем 2 п/ука
с 1-ой общей
вершиной O.

Для того, чтобы все вершины
имели ещё 2 вершины нужно добав-
лять ▭. 6 вершин – по одному
2 вершины – по две, в
общей точке O.

Добавим 3-ий ▭. У вершин K и N
теперь две вершины, но вместо
них появляется вершины 4 и M.

Добавим 4-ый и 5-ый ▭. Вершина
(F, N, O) имеет по 3 вершины,
а (A, 4, K, M, C) по две, а T – одну

Добавим 6-ой ▭. Вершина
L, A, ~~E~~, N – имеет по 3 вершины

Остались вершины T, M, C, которые
имеют 2 вершины – нельзя сделать
так, чтобы у них было по 3 вер-

шинп. При добавлении нового $\square$ с правой стороны мы получаем по две вершины, которые ~~больше~~ не являются вершинами других $\square$, если с левой стороны, через вершину K или (K и A), то у них будет по 4 вершины - нельзя.

Любые два $\square$ могут иметь так только в общие вершины. Каждое вершины, ~~дожит~~ добавление, должно тоже иметь 3 вершины ⇒ добавление нового $\square$ - 8.

Задача 9.10. числа неотриц.

Петя хочет большее число, Вася - меньшее.

Чисел 100.

Решение: Петя ходит первым, он постарается выбрать такие числа чтобы при составлении пар у Васи получалось наибольшее число из всех возможных.

(1) $\underbrace{\frac{1}{51}+\frac{1}{51}\ldots+\frac{1}{51}}_{51\ \text{штука}}+\underbrace{0+0+0\ldots+0}_{49\ \text{штук}}=1$

Сумма 1, чисел 100.

Вася захочет получить меньшее число, поэтому в произведение поставит (0 и $\frac{1}{51}$) таких пар 49.

Последняя пара будет из чисел ($\frac{1}{51}$ и $\frac{1}{51}$) в произведении дадут $\frac{1}{51^2}$.

② Если уменьшить кол-во первой группы

$$\frac{2}{51}$$

$$\underbrace{\frac{1}{51}+\dots+\frac{1}{51}}_{49}+\underbrace{\frac{2}{51^2}+\frac{2}{51^2}+\dots+\frac{2}{51^2}}_{51}$$

$$\frac{51}{51}-\frac{49}{51}=\frac{2}{51} \qquad \frac{2}{51}\cdot\frac{1}{51}=\frac{2}{51^2}$$

+

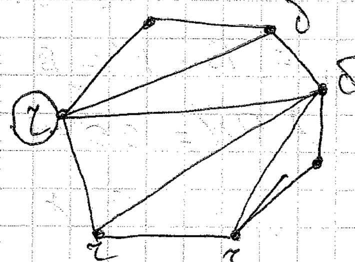
2

При любом Васином раскладе по парам (для наименьшего произведения) будет ~~наибольшая~~ сумма $\frac{2}{51^3}$ произведение $\frac{4}{51^4}$ наименее
Наибольшее $\frac{2}{51^3}$.

$\Rightarrow$ Петя бы не довёл до такого, ведь его ход первый.

$\frac{2}{51^3} < \frac{1}{51^2}$ Ответ: $\frac{1}{51^2}$

Задача 9. 9. $n \geq 4$. n-угольн. выпукл.



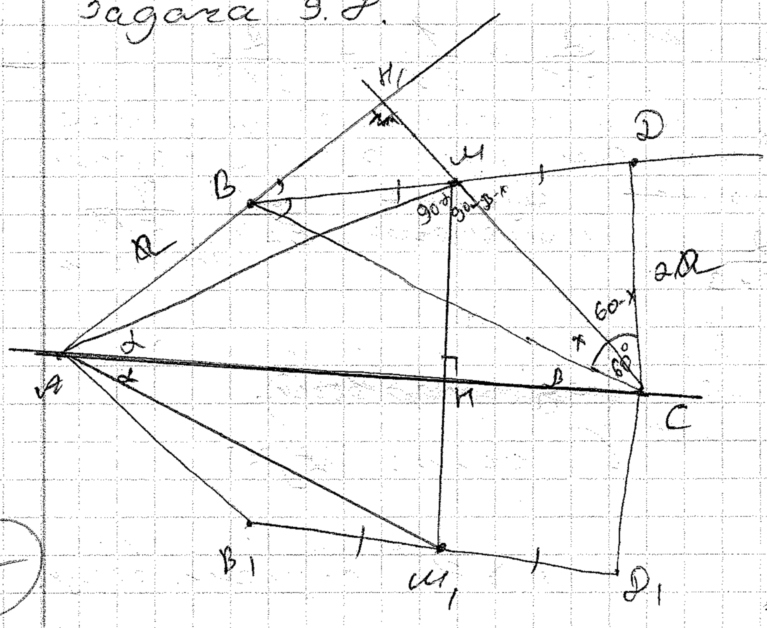
7-ми угольник разбит на Δ-ки диагоналями.

Одну из вершин содержащую диагонали раскрашиваем в 1 цвет допустим (ч.), две (все) диагонали исходящие из этой вершины красим в противоположный цвет (б.)
Диагонали исходящие из белых вершин красим в (ч)
Получим 7-уол. с хорошей раскраской. Остальные вершины можно

раскрасить в 7 цвет, ведь для этого 7-угольника уже есть вариант хорошей раскраски.

Найти кол-во хороших раскрасок для n-уг. $n \geq 4$ – невозможно.

Задача 9.8.



Проведем симметрию относительно AC

MM_1 будет $\perp$ к AC

Т.к $\triangle M_1AM$ р-б из-за симметрии

AH – биссектр. из-за симметрии $\Rightarrow$ AH – высота, мед.

$\exists$ $\angle MAH = \alpha$, $\angle MCB = x$, $\angle BCH = \beta$

$\Rightarrow \angle HMC = 90 - x - \beta$, $\angle AMH = 90 - \alpha$

$\angle H_1MA = 180 - 90 + \alpha - 90 + \beta + x = \alpha + \beta + x$

$\triangle BCD$ ($S_{\triangle BCM} = S_{\triangle MDC}$ т.к медиа)

$$\frac{BC \cdot MC}{2} \sin x = \frac{MC \cdot DC}{2} \sin(60 - x)$$

$BC \sin x = \cancel{D}\, 2a \sin(60 - x)$

$\angle BMH_1 = \beta + x$, $\angle BMA = \alpha$

Задача 9.6.

157 + 113, 111, 117

+ Об