10 MAI 09

ТЕТРАДЬ

для ______________________

____

учени__________ класса__________

__________ школы__________

1	2	3	4	5	Σ
7	—	7	—	0	14

10.1.

Давайте рассмотрим высказывания:

и увидим высказывание 10ого:

„моё число больше 10"

и рассмотрев вторые высказывания:

„моё число меньше 1
2
3.
...
10"

мы не найдём ему пару при которой оно было бы истинно, следовательно 10ый будет однозначно лжец! Следовательно количество рыцарей не превышает 9

Рыцарей ≥ 9.

Пример:

9 рыцарей 1 лжец:

моё число больше a
мое число меньше в

р: a – в

1) „Моё число больше 10"
„Моё число меньше 1"

1: 1 – 2
2: 2 – 3
3: 3 – 4
4: 4 – 5
5: 5 – 6
6: 6 – 7
7: 7 – 8
8: 8 – 9
9: 9 – 10.

7

Пример удался следовательно максимальное кол-во рыцарей 9.

Ответ: 9.

10.3.

Нам необходимо подобрать 2019 чисел и максимальное кол-во иррациональных.

Сумма в столбцах – рациональное число →

⇒ 1) иррациональное + иррациональное = рац./иррац.

2) рац. + рац. = рац.

ир.рац + рац = иррац (не подход

В таблице в столбцах должны стоять числа

типа $\boxed{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}}$ $\quad a = x + \sqrt{m}$, $b = x - \sqrt{m}$ (1) (x – рац.), что в сумме даёт 2x – р...

а оба числа – иррац, чтобы иррацион. было больше. Теперь если рассмотреть все 2019 чисел то они должны разбиться на пары, но 2019 – нечёт

⇒ 1 число остаётся без пары. ⇒ 2019 иррац. не может быть.

Если будет 2018 иррац. чисел в парах, то оставшемуся числу надо будет ставить его же, что нельзя!

⇓

2018 иррац не может быть.

Если будет 2017 иррац. чисел то они не будут в парах

⇓

2017 не может быть.

Если будет 2016 иррац. чисел, то (1) они распределятся по парам, а 3 рац. числа можно будет расставить, например: (p – рац. число)

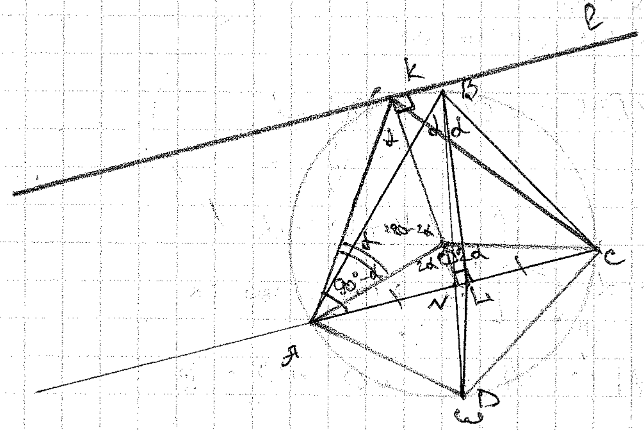
p_1	p_2	p_3
p_2	p_3	p_1

Следовательно кол-во иррациональных чисел не превышает 2016

Ответ: 2016.

7б

10.5.



$AC \parallel l$
$\angle B = 2\alpha$

д-ть что касат.

Доп. построение:
K – точка касания l к ω
Через центр O_2 окр. описанной около $\triangle BDL$ проходит единственная прямая $\parallel AC$

Решение:
так как $AC \parallel l$, мы провели прямую $OK \perp AC$ ⇒
⇒ $OK \perp l$

наоборот

$\square ABCD$ - вписанный $\Rightarrow$ $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

$\Downarrow$

$\angle ADC = 180 - 2\alpha$

$\angle ABC$ - вписанный $\Rightarrow$ /
$\angle AOC$ - центральный (Опираются на 1у дугу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOC = 4\alpha$

AN - биссектриса, высота, сер. перпендикуляр. $\Bigg\} \Rightarrow \angle AON = \angle NOC = 2\alpha$

$\Downarrow$

$\angle AOK = \angle COK = 180 - 2\alpha$

? $\angle KAC = 90 - \alpha$ $\Leftarrow \begin{cases} \angle KAC \text{ - вписанный} \\ \angle AOK \text{ - центральный} \end{cases}$ (на одну дугу)

Рассм. $\triangle AOC$ - р/б $\angle AOC = 4\alpha$
$\angle AOC + 2\angle OAC = 180°$

$\angle OAC = \angle OCA = 90° - 2\alpha$

$\Downarrow$

$\angle AKO = \alpha \Leftarrow \begin{cases} \angle KAO = \alpha \\ \angle AOK = 180 - 2\alpha \end{cases}$

$\Downarrow$

$\triangle AKO$ - р/б $KO = AO = R$

$\left.\begin{matrix} KO = R \\ KO \perp \ell \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ell$ - касательная

Центр описанной окружности ω (O)

и центр окруж. описаной около $\triangle BDL$ лежат

на одной прямой так как обе окр.

содержат хорду BD и центры лежат на

серединном перпендикуляре к

BD по разные стороны от BD.

10 МА II 09

6	7	8	9	10	Σ 18
7	7	0	4	—	

10.6

Нам даны 4 числа:

$a;\ a+1;\ a+2;\ a+3$

$a>100$

Из них можно выбрать 3 числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел больше 1.

Возможные суммы 3х чисел.

123 (1) $3a+3$

124 (2) $3a+4$

134 (3) $3a+5$

234 (4) $3a+6$

1) Рассмотрим случай когда a - чётный

(4) $3a+6=3(a+2) \Rightarrow$ эта сумма $\vdots\, 3$

$a+2$ (чётное + чётное) =

= чётное $\Rightarrow\ \vdots\, 2$

$3(a+2)=2\cdot3\cdot\underbrace{\left(\frac{a}{2}+1\right)}$

$\frac{a}{2}+1\in\mathbb{Z} \Leftarrow \frac{a}{2}\in\mathbb{Z}$ (т.к. a - чётное)

$\frac{a}{2}>50 \qquad \frac{a}{2}+1>51$

7б

✓

Следовательно $\frac{a}{2}+1$ будет третьим натуральным числом произведения и не равным 2 и 3 т.к.

$$\frac{a}{2}+1>51.$$

Т.е. когда a-чётное - всё получается

2) a-нечётное.

$$(1) \quad 3a+3=3(a+1) \Rightarrow \vdots 3 \text{ эта сумма}$$

a-нечётное $\Rightarrow$ a+1 - чётное $\Rightarrow \vdots 2$

$$3(a+1)=2\cdot 3\cdot\left(\frac{a}{2}+0,5\right)$$

a- нечетное $\Rightarrow \frac{a}{2}\notin \mathbb{Z}$

НО! $\frac{a}{2}+0,5\in \mathbb{Z}$

$\frac{a}{2}>50 \quad \frac{a}{2}+0,5>50,5$

$\frac{a}{2}+0,5 \Rightarrow$ третий натуральный член произведения не равный первым двум.

Т.е. когда a-нечётное мы тоже можем найти такую сумму. ч.т.д.

10.7.

Давайте рассмотрим данное нам: $a, b \in R$ $b > a > 1$

$x_n = 2^n(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a})$

При $n = 1$:

$x_1 = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) = 2(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a})(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a})$

$n = 2$:

$x_2 = 4(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a})$

Сравним 1 и 2

$2 \cdot \underline{2(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a})} \vee \underline{2(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a})}(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a})$

$=$

$\Updownarrow$

$2 \vee (\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a})$

НО! так как $b > a > 1 \Rightarrow$

$\sqrt[4]{b} > 1$ $\sqrt[4]{a} > 1$

Сложим и получим:

$\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a} > 2$,

$\Downarrow$

$x_1 > x_2$

Теперь рассмотрим формулы n и $n+1$ члена.

$x_n = 2^n(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a})$ $x_{n+1} = 2^{n+1}(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a})$

Разложим на множители x_n и x_{n+1}

$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)$$

$$x_{n+1} = 2^n \cdot 2\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)$$

эти части равны

Что сравнить x_n и x_{n+1}:

$$\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} \vee 2$$

Так как $b > a > 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[2^{n+1}]{b} > 1 \\ \sqrt[2^{n+1}]{a} > 1 \end{array}\right.$ +

$$! \quad \sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} > 2,$$

$$\Downarrow$$

~~пр~~ последовательность убывает. $\Leftarrow$ $x_n > x_{n+1}$

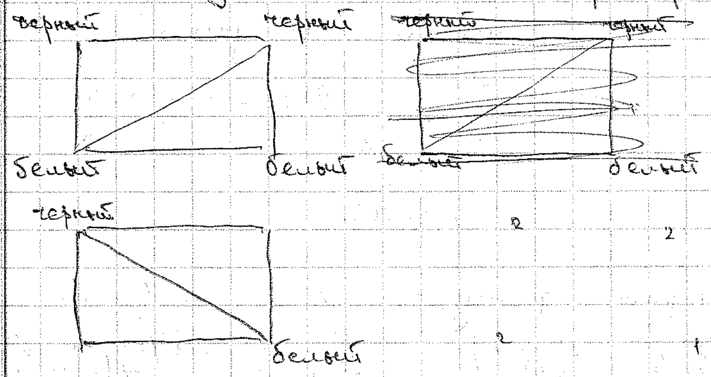
Что и необходимо было доказать!

7б

10.9.

При рассмотрении $n=4$ мы видим ~~...~~ $12 = 4 \cdot 3$

что возможно только ~~х~~ „хорошие" раскраски



мы оставляем противоположные углы разного цвета а выставить на 2 вершины цвет можно 4 способами: черн – черн.
бел – бел.
черн – бел
бел – черн.

Здесь была допущена ошибка т.к. встречались одинаковые варианты которых было 4.

А разместить 2 ~~в~~ противоположные вершины и менять цвет 4 способа.

всего ~~4·3~~ = ~~12~~ способов

Теперь рассмотрим n = 5, в том случае:

~~Бел~~ 1) выбрать 1 черную вершину подходит всегда. следовательно 5 способов.

2) Так же подходят способы когда две черные (белые) вершины рядом. => 5 способов

3) Аналогично 3 вершины всегда вместе => => 5 способов.

4) 4 вершины одного цвета вместе. => => 5 способов.

В 5угольнике => 5·4 = 20 способов.

Я заметил что вершины одного цвета всегда должны быть рядом.

Рассмотрим 6угольник в котором:

1) выбрать 1 вершину ⇒ 6способов

2) 2 вершины стоящие рядом ⇒ 6 способов

3) 3 —"—"— ⇒ 6 способов

4) 4 —"— "— ⇒ 6 способов

5) 5 ⇒ 6 способов.

$6 \cdot 5 = 30$ хороших раскрасок

Из подбора и сделанных выводов видно что у каждой фигуры n мы рассматриваем ~~n-1 спо~~ n − 1 вариантов кол-ва различ. вершин. из чего следует что кол-во хороших раскрасок у каждой n фигуры равно $n(n-1)$

Ответ: $n(n-1)$

(+-)

1 б

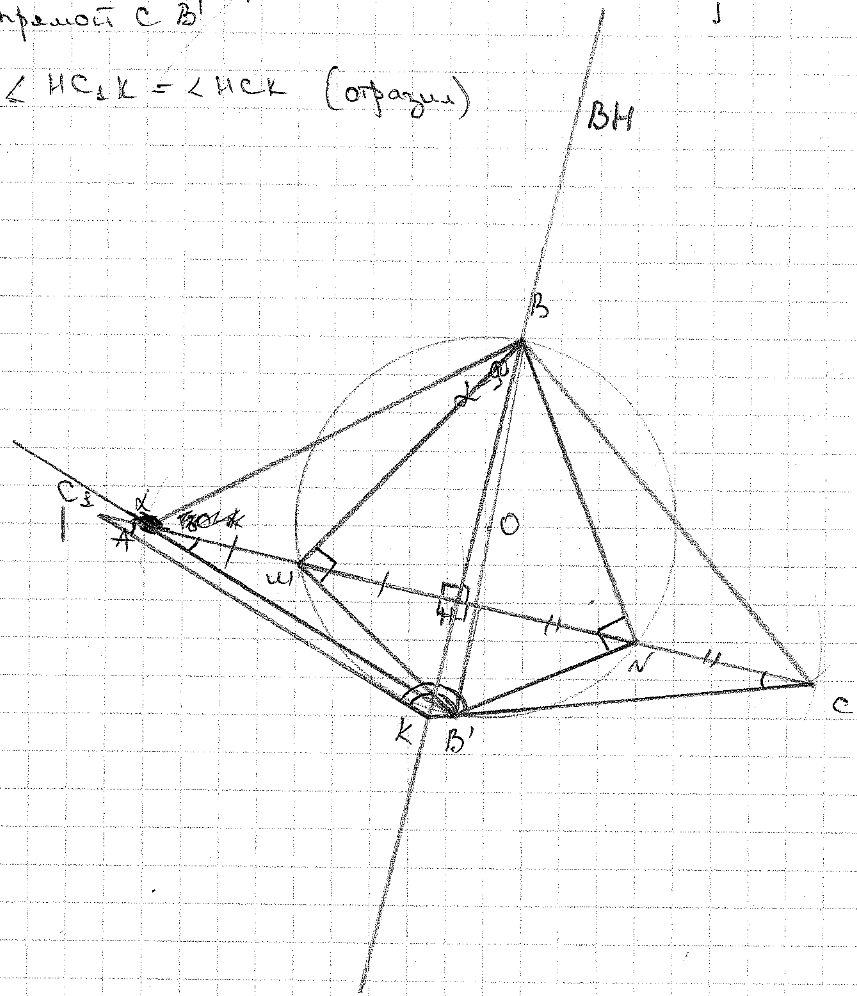
10.8.

Построим рисунок на следующей странице

Доп. построение: 1) отразим точку C и отрезок CB относительно высоты BH. и обозначим C_1

K - точка пересечения BH с прямой CB'

$\angle HC_1K = \angle HCK$ (отразим)



Прямые C_1K и AB' параллельны $\Rightarrow$ $\square KHCB'$

$\Rightarrow \angle HC_1K = \angle HAB'$ (между пар. прямыми) (AC- общая)

$\Downarrow$

$\angle HAB' = \angle HCB'$ $\Rightarrow$ $\triangle ACB'$ – р/б

$\Downarrow$

$HB' = CB'$